Bull. Sci. math. 125, 5 (2001) 395–405

SUR LE SYSTÈME DE GAUSS–MANIN D'UN POLYNÔME MODÉRÉ

PAR

ANTOINE DOUAI

Laboratoire J.A Dieudonné, UMR 6621, Université de Nice, Parc Valrose, F-06108 Nice cedex 2, France

Texte présenté par J.-P. FRANÇOISE, reçu en octobre 2000

RÉSUMÉ. – Given a cohomologically tame polynomial we compute the determinant of a period matrix and, when the Gauss–Manin connexion is described by a fuchsian system, we give a formula for the trace of the residue matrices. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Mots Clés: Système de Gauss–Manin; Réseau de Brieskorn

AMS classification: 32S40

1. Enoncé des résultats

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale non constante. Dans tout ce qui suit on supposera que f est *cohomologiquement modérée* (c'est à dire sans cycles évanescents à l'infini [3,6,12]). Les polynômes tame au sens de Broughton [5], commodes et non-dégénérés au sens de Kouchnirenko [10] sont cohomologiquement modérés. On notera $C_f = \{c_1, \ldots, c_s\}$ l'ensemble des valeurs critiques de f et μ la somme des nombres de Milnor de f en ses points critiques.

Soit $\mathcal{M}$ le sytème de Gauss–Manin de f (c'est un $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-module holonome régulier qui correspond, via le foncteur de Rham, à l'image directe du faisceau constant) et posons $M = \Gamma(\mathbb{C}, \mathcal{M})$. M est un $\mathbb{C}[t] < \partial_t >$-module que l'on peut définir comme suit : soit K_f le

E-mail address: douai@math.unice.fr (A. Douai).

complexe $(\Omega^{*+n}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\partial_t],\ d_f)$ (Ω^{*+n} désigne l'espace des $*+n$ formes à coefficients polynomiaux) dont la différentielle est donnée par

$$d_f\big(\omega\otimes\partial_t^i\big)=d\omega\otimes\partial_t^i-df\wedge\omega\otimes\partial_t^{i+1}.$$

Alors $M=H^0(K_f)$. Considérons le $\mathbb{C}[t]$-sous-module $M_0:=\Omega^n/df\wedge d\Omega^{n-2}$ (si $\omega\in\Omega^n$ alors $t[\omega]=[f\omega]$, $[\omega]$ désignant la classe de ω dans M_0). Comme f est cohomologiquement modérée, M_0 est *libre de rang* μ sur $\mathbb{C}[t]$ [12, théorème 4], [6, théorème 0.1]. Il est de plus stable par $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$ ($\partial_t^{-1}[\omega]=[df\wedge\eta]$ η étant n'importe quelle forme de degré $n-1$ vérifiant $d\eta=\omega$) et engendre M sur $\mathbb{C}[t]<\partial_t>$. C'est le *réseau de Brieskorn*, version globale du réseau défini par Brieskorn [4] pour un germe de fonction holomorphe à l'origine. L'étude de ce réseau a motivé une série d'articles [2,3,9,12]... .

Le premier résultat donne une formule pour le déterminant d'une matrice de périodes analogue à celle trouvée par Varchenko [1, p. 258] dans le cas local. Choisissons une base $\{\eta_1,\dots,\eta_\mu\}$ quelconque de M_0 sur $\mathbb{C}[t]$ et posons $\overline{\eta}_i=\partial_t^{-1}\eta_i$. Il existe donc une $n-1$ forme σ_i telle que $\overline{\eta}_i=df\wedge\sigma_i$. Chaque $n-1$-forme σ_i détermine une forme fermée sur la fibre $f^{-1}(t)$ pour toute valeur $t\in\mathbb{C}-C_f$. Soit $\gamma_1,\dots,\gamma_\mu$ une famille continue de cycles qui forme une base horizontale de $H_{n-1}(f^{-1}(t),\mathbb{Z})$ pour tout $t\in\mathbb{C}-C_f$. On définit

$$\Box_\gamma^\eta(t)=\det\left(\left(\int_{\gamma_j}\sigma_i\right)_{1\leqslant i,j\leqslant\mu}\right).$$

Ce déterminant (à constante multiplicative non-nulle près) ne dépend pas des bases choisies et son carré définit une fonction uniforme. On définit le discriminant de f par la formule

$$\Delta(t):=(t-c_1)^{\mu_1}\cdots(t-c_s)^{\mu_s}$$

où c_i parcourt C_f et μ_i est la somme des nombres de Milnor des points critiques de f qui se trouvent sur l'hypersurface $f^{-1}(c_i)$.

THÉORÈME 1.0.1. – *Dans ces conditions, on a* $\Box_\gamma^\eta(t)^2=c(\eta,\gamma)\times\Delta^n(t)$ *où* $c(\eta,\gamma)$ *est une constante non nulle.*

Cette formule généralise celle obtenue par Gavrilov [9].

Le calcul de ce déterminant s'effectue tout d'abord dans des bases très spéciales de M_0 (les très bonnes bases au sens de [7,12]). Il faut noter que la preuve ne fait intervenir que des objets globaux.

Le deuxième résultat est motivé par l'étude du problème de Riemann–Hilbert pour le système de Gauss–Manin de f. Supposons qu'il existe une base de M_0 sur $\mathbb{C}[t]$ dans laquelle le système défini par la connexion ∂_t soit fuchsien (c'est à dire que la matrice de la connexion ∂_t s'écrit dans cette base

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{B_i}{(t-c_i)}$$

les matrices B_i étant constantes). Les valeurs propres des matrices résidus (qui ne dépendent que du réseau M_0 et pas des bases choisies), ou tout au moins leurs traces, s'expriment elles en fonction de données locales (par exemple de spectres locaux [1]) ?

THÉORÈME 1.0.2. – (i) *Soit Ω une base de M_0 dans laquelle la matrice de ∂_t s'écrit*

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{B_i}{(t-c_i)}$$

les matrices B_i étant constantes. Alors, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, on a $\mathrm{trace}(B_i) = \mu_i(\frac{n}{2}-1)$.

(ii) *Une telle base existe dès que la multiplication par f sur l'espace vectoriel* (*de dimension μ*) *$\Omega^n/df \wedge \Omega^{n-1}$ est diagonalisable.*

Ce théorème signifie que la trace de chaque matrice B_i est égale à la somme des éléments des spectres des points singuliers de l'hypersurface $f^{-1}(c_i)$ (rappelons que le spectre d'un point critique est symétrique par rapport à $\frac{n}{2}-1$).

Pour trouver des bases de M_0 sur $\mathbb{C}[t]$ nous considérons tout d'abord M_0 comme $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$-module (il s'agit essentiellement de l'analogue de la microlocalisation telle que définie par Pham [11] dans le cas local). Cette méthode permet d'unifier et de retrouver élémentairement les résultats connus ([3, Prop. 2], [9, Th. 1.1]...).

Cet article est une partie (révisée) de la prépublication [8]. Alors que ce travail était achevé, j'ai été informé par A. Dimca que la formule pour le déterminant a été obtenue d'une manière différente dans une nouvelle version de [6].

2. Bases de M_0 comme $\mathbb{C}[t]$-module

La proposition qui suit (essentiellement connue) permettra de trouver des bases privilégiées de M_0 sur $\mathbb{C}[t]$.

PROPOSITION 2.0.3. – *Soit Φ une base de M_0 sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$. On suppose qu'il existe deux matrices constantes A_0 et A_1 telles que*

$$t\Phi = A_0\Phi + A_1\partial_t^{-1}\Phi.$$

Si A_1 n'a pas de valeurs propres entières négatives alors Φ est une base de M_0 sur $\mathbb{C}[t]$. De plus le système défini par la connexion ∂_t dans cette base est Fuchsien si et seulement si la matrice A_0 est diagonalisable. Si tel est le cas, les valeurs propres des matrices résidu sont toutes strictement plus grandes que -1 et elles sont contenues dans l'intervalle $]-1,0]$ si et seulement si $n=2$ et les points critiques de f sont tous non-dégénérés.

Preuve. – La première assertion (classique) résulte de la formule

$$\partial_t^{-k}\Phi = \prod_{l=0}^{k-1}\left[(A_1 + lId)^{-1}(tId - A_0)\right]\Phi.$$

Ecrivons $\partial_t\Phi = B(t)\Phi$: on a $B(t) = (tI - A_0)^{-1}(A_1 - I)$. Supposons la matrice A_0 diagonalisable. Les pôles de la matrice B sont contenus dans l'ensemble des valeurs propres de A_0 et par hypothèse ils sont au plus d'ordre 1 : en effet la matrice A_0 est diagonalisable et $(tI - A_0)^{-1}(A_1 - I) = PD(t)P^{-1}(A_1 - I)$ où P est une matrice constante non-singulière et $D(t)$ est la matrice diagonale dont les éléments sont $1/(t - a_i)$, a_i parcourant les valeurs propres de A_0. Comme l'infini est aussi un pôle d'ordre 1 (car si l'on pose $z = 1/t$ on a $-z(I - zA_0)\partial_z\Omega = (A_1 - I)\Omega$) le système obtenu est Fuchsien. La réciproque est claire. Les valeurs propres des matrices résidu (à distance finie !) sont strictement plus grandes que -1 car avec nos hypothèses le réseau M_0 est contenu dans l'extension canonique de Deligne [6, théorème 0.1] avec égalité si et seulement si $n=2$ et les points critiques de f sont tous non-dégénérés. □

Remarque 2.0.4. – Il n'y a pas ici de lien entre la structure de Jordan de la matrice A_0 et celle de la matrice T_∞ de la monodromie à l'infini du polynôme f (transformation associée à l'action d'un lacet qui entoure toutes les valeurs critiques de f) : par exemple, il se peut que A_0 soit diagonalisable mais que T_∞ ne le soit pas [7, exemple 5.3.3] (comparer avec le cas local). La deuxième assertion de la proposition n'était donc pas *a priori* prévisible.

Soit G_0 le $\mathbb{C}[t]$-module M_0 vu comme $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$-module. Comme M_0 est libre de rang μ, G_0 est libre de rang μ sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$ [12, corollaire 5] (voir aussi le point (iii) de la remarque ci-dessous).

Gardons les notations de l'introduction. Soit G le transformé de Fourier du système de Gauss–Manin M du polynôme f, c'est à dire M vu comme $\mathbb{C}[\tau] < \partial_\tau >$-module où l'on a posé $\tau = \partial_t$ et $\partial_\tau = -t$. On définit la filtration, indexée par les rationnels, de Malgrange–Kashiwara $V^\bullet$ de G en $\tau = 0$ [12]. Cette filtration induit une filtration (notée aussi $V^\bullet$) sur $\Omega_f := \Omega^n / df \wedge \Omega^{n-1}$. Le spectre du polynôme f à l'infini est l'ensemble des μ nombres rationnels α (comptés avec multiplicité) tels que $gr_V^\alpha \Omega_f \neq 0$. Ce spectre est noté $spec(f)$.

Ses propriétés essentielles sont les suivantes : $spec(f)$ est symétrique par rapport à $\frac{n}{2}$ [12, corollaire 7] et contenu dans l'intervalle $]0, n[$ [12, corollaire 10].

Si $\omega \in G$, nous noterons $\alpha(\omega) = \max\{\alpha, \omega \in V^\alpha G - V^{<\alpha} G\}$ (sa "valuation").

Dans un précédent travail [7] nous avions expliqué comment trouver explicitement des très bonnes bases de G_0, c'est à dire des bases Ω de G_0 sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$ telles que, si l'on écrit Ω en colonne,

$$t\Omega = A_0 \Omega + A_1 \partial_t^{-1} \Omega$$

avec A_0 et A_1 matrices constantes, A_1 diagonale dont le spectre coincide avec le spectre à l'infini du polynôme $f A_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu)$.

Notons que dans les cas les plus simples (par exemple f semi-quasi-homogène) ces résultats sont élémentaires [7, section 3]. Avec les notations qui précèdent, $\Delta(t) = \det(tI - A_0)$, Δ étant le discriminant de f défini en introduction.

COROLLAIRE 2.0.5. – *Soit Ω une très bonne base de G_0 sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$. Alors Ω est une base de M_0 sur $\mathbb{C}[t]$. Le système défini par la connexion ∂_t dans la base Ω de M_0 est fuchsien si et seulement si la multiplication par f sur $\Omega^n / df \wedge \Omega^{n-1} = G_0 / \partial_t^{-1} G_0$ est diagonalisable.*

Preuve. – Ecrivons $t\Omega = A_0\Omega + A_1\partial_t^{-1}\Omega$. Les valeurs propres de A_1 sont par définition contenues dans l'intervalle $]0, n[$. D'où la première assertion. La deuxième s'obtient en remarquant que A_0 représente la multiplication par f sur $\Omega^n/df \wedge \Omega^{n-1}$ (dans la base induite par Ω). □

Remarque 2.0.6. – (i) Les valeurs propres de la matrice A_0 sont exactement les valeurs critiques de f : si celles ci sont toutes distinctes le corollaire précédent assure que le système différentiel défini par la connexion de Gauss–Manin est Fuchsien. D'après [2] la multiplication par f est diagonalisable si et seulement si toutes ses singularités sont quasi-homogènes.

(ii) Soit $G_{-k} = \partial_t^{-k}G_0$ et notons M_{-k} ($k \geqslant 0$) le $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$-module libre G_{-k} vu comme $\mathbb{C}[t]$-module. De la même manière que ci-dessus on montre que si $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_\mu\}$ est une très bonne base de G_0 sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$ alors $\partial_t^{-k}\Omega := \{\partial_t^{-k}\omega_1, \ldots, \partial_t^{-k}\omega_\mu\}$ fournit une base de M_{-k} sur $\mathbb{C}[t]$.

(iii) Si f est commode et non-dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini [10] on peut montrer directement (i.e sans utiliser la finitude de M_0), à l'aide de [7, section 5], que G_0 est libre de rang μ sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$ et qu'il existe des très bonnes bases de G_0 sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$. On en déduit que M_0 est libre de rang μ sur $\mathbb{C}[t]$.

Exemple 2.0.7. – (i) Soit $f(x, y) = y^2 - P(x)$ où P est un polynôme de degré n.

Alors $\{[dx\,dy],\ [x\,dx\,dy], \ldots,\ [x^{n-2}\,dx\,dy]\}$ est une base de M_0 sur $\mathbb{C}[t]$. En effet, écrivons

$$t\Omega = A_0\Omega + A_1\partial_t^{-1}\Omega$$

($\Omega = ([dx\,dy], \ldots, [x^{n-2}dx\,dy])^t$). Le spectre de f vaut $\{1/2+1/n, \ldots, 1/2 + (n-1)/n\}$. Il est donc contenu dans un intervalle de longueur strictement plus petite que 1. D'après [7, proposition 5.1.1], la matrice A_1 est constante et ses valeurs propres sont égales à *spec*(f).

(ii) De la même manière, si f est un polynôme semi-quasi-homogène (sa composante homogène de plus haut degré $in(f)$ est à singularité isolée) toute base de $\Omega^n/d(in(f)) \wedge \Omega^{n-1}$ sur $\mathbb{C}$ se relève en une $\mathbb{C}[t]$-base de M_0 (ce qui permet de retrouver [3, prop. 2]).

3. Calcul du déterminant

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_\mu\}$ une très bonne base de G_0 (son existence est garantie par [7, théorème 4.0.6], [12, corollaire 12]). Pour tout $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, on pose $\overline{\omega}_i := \partial_t^{-1}\omega_i = df \wedge \sigma_i$ $(d\sigma_i = \omega_i)$ et $\overline{\Omega} = \{\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_\mu\}$. Avec les notations de la remarque 2.0.6(ii), $\overline{\Omega}$ est une base sur $\mathbb{C}[t]$ du réseau M_{-1}. On définit, comme dans l'introduction, le wronskien

$$\square_\gamma^\Omega(t) = \det\left(\left(\int_{\gamma_j} \sigma_i\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant \mu}\right).$$

Notons $A_0 = (a_{ij}^0)$.

PROPOSITION 3.0.8. – *Supposons que la base Ω soit choisie de sorte que*

(i) $a^0_{\mu+1-j,\mu+1-i} = a^0_{i,j}$ *pour tous* $1 \leqslant i, j \leqslant \mu$,

(ii) $\alpha_i = n - \alpha_{\mu+1-i}$.

Alors $\square_\gamma^\Omega(t) = c(\Omega, \gamma)\Delta^{n/2}(t)$ *où* $c(\Omega, \gamma)$ *est une constante non nulle.*

Preuve. – On a $(tI - A_0)\partial_t\overline{\Omega} = A_1\overline{\Omega}$ d'où $\Delta(t)\partial_t\overline{\Omega} = B(t)\overline{\Omega}$ où B est une matrice à coefficients polynomiaux en t. Sa trace vaut $\sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \Delta_{ii}(t)$ où $\Delta_{ii}(t)$ est le mineur de $tI - A_0$ relatif à $t - a_{ii}^0$. Le déterminant $\square(t)$ vérifie ainsi l'équation

$$\Delta(t)\partial_t\square(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \Delta_{ii}(t)\,\square(t).$$

La propriété de symétrie de la matrice A_0 montre que, pour tout i, $\Delta_{ii}(t) = \Delta_{\mu+1-i\ \mu+1-i}(t)$. Comme de plus $\alpha_i = n - \alpha_{\mu+1-i}$ on en déduit que $\sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i \Delta_{ii}(t) = \frac{n}{2}\Delta(t)'$. $\square(t)$ vérifie donc l'équation $\Delta(t)\partial_t\square(t) = \frac{n}{2}\Delta(t)'\,\square(t)$. D'où le résultat. $\square$

Remarque 3.0.9. – Dans une situation locale, on a $\square_\gamma^\Omega(t) = c\Delta^{n/2}$ sans aucune hypotèse de symétrie sur la matrice A_0 : on a en effet dans ce cas, avec les notations précédentes, $\Delta_{ii} = t^{\mu-1}$ pour tout i.

Nous allons montrer que l'on peut choisir une très bonne base Ω de G_0 dans laquelle la matrice A_0 vérifie la propriété de symétrie requise dans la proposition 3.0.8. Rappelons [12, théorème 6] qu'il existe un unique accouplement non-dégénéré

$$S : G_0 \times G_0 \to \mathbb{C}\big[\partial_t^{-1}\big]\partial_t^{-n}$$

vérifiant les conditions

$$S\big(\partial_t^{-1}\bullet\,,\ \bullet\big) = \partial_t^{-1}S(\bullet\,,\ \bullet),$$

$$S\big(\bullet\,,\ \partial_t^{-1}\bullet\big) = -\partial_t^{-1}S(\bullet\,,\ \bullet),$$

$$[t, S(\bullet, \bullet)] = S(t\bullet, \bullet) - S(\bullet, t\bullet).$$

On dit que la très bonne base Ω est adaptée (à S) si, pour tous $i,\ j$, $S(\omega_i, \omega_j) \in \mathbb{C}\partial_t^{-n}$. Le lemme suivant résulte des propriété de S.

LEMME 3.0.10. – *Si Ω est adaptée, on a*

$$S(A_0\omega_i, \omega_j) = S(\omega_i, A_0\omega_j)$$

et

$$S(A_1\omega_i, \omega_j) + S(\omega_i, A_1\omega_j) = nS(\omega_i, \omega_j).$$

En particulier si $S(\omega_i, \omega_j) \neq 0$ alors $\alpha(\omega_i) + \alpha(\omega_j) = n$ $(\alpha(\omega_i) = \alpha_i)$.

LEMME 3.0.11. – *Une très bonne base adaptée fournit, après un changement de base linéaire, une très bonne base $\Upsilon := \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu\}$ telle que, pour tous $i,\ j$,*

$$S(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{i,\mu+1-j}$$

(*en particulier $\alpha(\varepsilon_i) + \alpha(\varepsilon_{\mu+1-i}) = n$*).

Preuve. – Il suffit de remarquer que dans le processus d'orthonormalisation on peut choisir un changement de base qui préserve les sous-espaces engendrés par les éléments de Ω de même valuation. C'est ce qui résulte de la dernière égalité du lemme précédent, jointe au fait que S est non-dégénérée. □

Ecrivons $t\Upsilon = A_0^{\Upsilon}\Upsilon + A_1\partial_t^{-1}\Upsilon$. Du lemme 3.0.10 on déduit

LEMME 3.0.12. – *La matrice A_0^{Υ} est symétrique au sens de la proposition* 3.0.8. *En particulier*

$$\square_\gamma^{\Upsilon}(t) = c(\Upsilon, \gamma)\Delta^{n/2}(t).$$

Comme [12, corollaire 12] il existe toujours des très bonnes bases adaptées, le théorème 1.0.1 résulte du lemme 3.0.12 (rappelons que le déterminant ne dépend pas, à constante multiplicative non-nulle près, des bases choisies).

4. Trace des matrices résidus

Reprenons la situation du corollaire 2.0.5 : Ω est une très bonne base de G_0 (sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$) et la matrice A_0 est diagonalisable. Ω est donc une base de M_0 sur $\mathbb{C}[t]$ et l'on a

$$\partial_t \Omega = \sum_{i=1}^{s} \frac{B_i}{(t-a_i)} \Omega$$

les matrices B_i étant constantes. Le résidu de la connexion ∂_t à l'infini est

$$B_\infty = -(A_1 - I).$$

Du fait de la symétrie du spectre, sa trace vaut $-\mu(\frac{n}{2}-1)$. Ce résidu à l'infini est aussi égal à $-\sum_{i=1}^{s} B_i$. Si l'on note $b_i = tr(B_i)$ on a donc $\sum_{1\leqslant i\leqslant s} b_i = \mu(\frac{n}{2}-1)$.

Remarque 4.0.13. – D'après la proposition 2.0.3, si $n=2$ et les points critiques de f sont tous non-dégénérés les valeurs propres des matrices résidus de la connexion sont toutes nulles.

Rappelons que, pour $i \in \{1,\ldots,s\}$, μ_i désigne la somme des nombres de Milnor des points critiques de f qui se trouvent sur l'hypersurface $f^{-1}(c_i)$.

Définissons $\overline{\Omega}$ de la même manière qu'au début de la section 3. D'après la remarque 2.0.6(ii), $\overline{\Omega}$ est une base du réseau M_{-1} et on peut écrire dans cette base

$$\partial_t \overline{\Omega} = \sum_{i=1}^{s} \frac{B_i^{(1)}}{t-a_i} \overline{\Omega}$$

où les $B_i^{(1)}$ sont des matrices constantes. Notons b_i^1 la trace de la matrice $B_i^{(1)}$.

LEMME 4.0.14. – *Pour tout* $1 \leqslant i \leqslant s$ *on a* $b_i = \mu_i(\frac{n}{2} - 1)$ *si et seulement si* $\square_\gamma^\Omega(t) = c(\Omega, \gamma)\Delta^{n/2}(t)$.

Preuve. – Par définition de la connexion de Gauss–Manin, $\square$ est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = \sum_{i=1}^{s} \frac{b_i^1}{t - a_i} y$$

et s'écrit par conséquent $\square(t) = c \prod_{i=1}^{s} (t - a_i)^{b_i^1}$. Comme la multiplicité de a_i dans $\Delta(t)$ est μ_i on en déduit que $b_i^1 = \mu_i \frac{n}{2}$ si et seulement si $\square(t) = c\Delta^{n/2}(t)$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $b_i^1 = b_i + \mu_i$: il suffit de supposer que la multiplicité de la valeur propre a_i est égale à 1 (le cas général se traitant de la même manière). Ecrivons $\Delta^i(t) := \Delta(t)/(t - a_i)$ et soit $\Delta_{kk}(t)$ le mineur de $tI - A_0$ relatif à $t - a_{kk}^0$. La trace de la matrice B_i vaut (se référer à la preuve de la proposition 2.0.3)

$$b_i = \frac{\sum_k (\alpha_k - 1)\Delta_{kk}(a_i)}{\Delta^i(a_i)} = \frac{\sum_k \alpha_k \Delta_{kk}(a_i)}{\Delta^i(a_i)} - \frac{\Delta'(a_i)}{\Delta^i(a_i)} = b_i^1 - 1$$

l'égalité intermédiaire résultant de la formule $\Delta(t)' = \sum_{i=k}^{\mu} \Delta_{kk}(t)$. $\square$

Le théorème 1.0.2 se montre maintenant de la manière suivante : (ii) résulte du corollaire 2.0.5. Le point (i) résulte du lemme 4.0.14 et du théorème 1 (parceque la trace des matrices résidus ne dépend que de M_0 et pas des bases choisies).

RÉFÉRENCES

[1] Arnold V.I., Gusein-Zade S., Varchenko A., Singularités des Applications Différentiables, Vol. 2, Editions Mir, 1986.

[2] Bailly-Maitre G., Monodromie des polynômes à deux variables complexes, Thèse de l'Université de Bordeaux I.

[3] Bonnet Ph., Dimca A., Relative differential forms and complex polynomials, Bull. Sci. Math. 7 (2000) 557–571.

[4] Brieskorn E., Die Monodromie der isolierten Singularitaten von Hyperflachen, Manuscripta Math. 2 (1970) 103–161.

[5] Broughton S.A., Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces, Invent. Math. 92 (1988) 217–241.

[6] Dimca A., Saito M., Algebraic Gauss–Manin systems, preprint math.AG/9906129.

[7] Douai A., Très bonnes bases du réseau de Brieskorn d'un polynôme modéré, Bull. Soc. Math. France 127 (1999) 255–287.
[8] Douai A., Sur la structure de Saito associée à un polynôme (cohomologiquement) modéré, prépublication 570 de l'université de Nice, Mars 2000.
[9] Gavrilov L., Petrov modules and zeros of abelian integrals, Bull. Sci. Math. 122 (1998) 571–584.
[10] Kouchnirenko A.G., Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math. 32 (1976) 1–31.
[11] Pham F., Singularités des Systèmes de Gauss–Manin, Progress in Math., Vol. 2, Birkhauser, Boston, 1980.
[12] Sabbah C., Hypergeometric period for a tame polynomial, C. R. Acad. Sci. Paris, série I 328 (1999) 603–608.